Tentamen "Relativiteitstheorie" **(bladzij 1 van 2)** **1-11-2004**

s.v.p. elke opgave op een apart vel! **(nakijken door verschillende personen!)**

Op elk vel naam en studentnummer vermelden!

Opgave 1: Landing van een ruimteship

Een ruimteschip nadert de Aarde met een snelheid $v=1/\sqrt{2}$. Op $t=0$ zendt het ruimteschip een radarsignaal naar de Aarde (gebeurtenis A). Op dat moment is de afstand tot de aarde nog 20 lichtuur. Op tijdstip $t=t_0$ wordt de reflectie van het radarsignaal ontvangen (gebeurtenis B), waarna onmiddellijk met de landingsprocedure wordt begonnen. Deze is zodanig dat de baan van het ruimteschip in het inertiaalsysteem van de Aarde voor $t \geq t_0$ gegeven wordt door

$$x(t) = \frac{\sin[\omega(t-t_0)+\alpha_0]-b}{\omega}, \qquad (1)$$

met $\omega = \pi/40$ [h^{-1}], $\alpha_0 = \pi/4$ en $b=0.9765$. Het ruimteschip landt op Aarde op tijdstip $t=t_1$ (gebeurtenis C).

a) Bereken de ruimte-tijd coördinaten van gebeurtenis B.
b) Bereken het tijdstip van landing $t=t_1$. (Hint: Op tijdstip t_1 geldt dat de snelheid $v(t_1)=0$.)
c) Teken een kwantitatief nauwkeurig ruimte-tijd diagram met daarin aangegeven de gebeurtenissen A, B en C.
d) Bereken de eigentijd zoals gemeten door een klok in het ruimteschip tussen de gebeurtenissen A en B.
e) Bereken eveneens de eigentijd gemeten door een klok in het ruimteschip tussen de gebeurtenissen B en C.

   (Hint: $1-\cos^2 x = \sin^2 x$ en $\int \sin[\omega(t-t_0)+\alpha_0]dt = -\frac{1}{\omega}\cos[\omega(t-t_0)+\alpha_0]$.)

Opgave 1: Lorentzcontractie

Een ruimteschip met een eigen lengte van L_R=150 m vliegt met hoge snelheid een door een berg geboorde tunnel in. De eigen lengte van de tunnel is 100 m. Waarnemers in de tunnel zien dat op tijdstip t=t'=0 waarop de achterkant van het ruimteschip de tunnel ingaat (gebeurtenis A), de voorkant nog 10 m van het einde van de tunnel is verwijderd.

a- bereken de snelheid van het ruimteschip

Waarnemers aan boord van het ruimteschip zien de tunnel gecontraheerd. Voor hen is duidelijk dat hun ruimteschip niet in de tunnel past.

b- hoeveel steekt het ruimteschip volgens hen uit de tunnel op het moment dat de achterkant de tunnel in gaat?

c- Verklaar deze schijnbaar tegenstrijdige waarnemingen aan de hand van een twee-waarnemer ruimte-tijd diagram (beschouw het stelsel van de tunnel als 'homeframe').

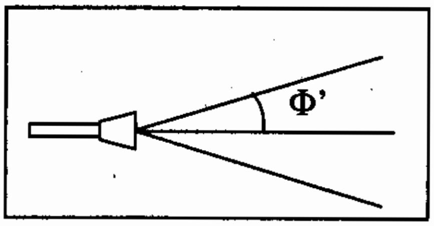
d- Gebruik de Lorentztransformaties om te berekenen wanner de voorkant van het ruimteship het eind van de tunnel bereikt in het stelsel van de tunnel (T) en in dat van het ruimteship (T').

s.v.p. elke opgave op een apart vel! **(nakijken door verschillende personen!)**

Op elk vel naam en studentnummer vermelden!

Opgave 3: *Koplampeffect*

Een zaklantaarn zendt een lichtkegel uit met een openingshoek van Φ' (in zijn eigen stelsel; zie schets). We kiezen de x-as in de gemiddelde licht-richting. Er geldt dan voor de snelheidscomponenten van de lichtstraal aan de bovenkant $v_x' = \cos\Phi'$ en $v_y' = \sin\Phi'$.



We beschouwen nu het geval dat de lantaarn in een 'homeframe' met een snelheid β in de positieve x-richting beweegt.

a) Gebruik de Einstein snelheidstransformaties om te laten zien dat de openingshoek van de lichtkegel in het 'homeframe' gegeven wordt door:

$$\sin\Phi = \frac{\sin\Phi'}{\gamma(1+\beta\cos\Phi')}$$

b) Neem aan dat de openingshoek $\Phi' = 30^\circ$ is en de lantaarn met een snelheid van $\beta = 0.6$ beweegt. Wat is dan de openingshoek in het 'homeframe'?

c) We beschouwen vervolgens een lichtbron met een isotrope verdeling (even veel licht in alle richtingen), die met snelheid $\beta = 0.99$ beweegt. Bereken de openingshoek in het 'homeframe', waarbinnen de helft van al het licht geëmitteerd wordt.

Opgave 4: Inelastische botsing

Twee objecten van gelijke rustmassa *m* ondergaan een geheel inelastische botsing. Beide objecten vormen na de botsing een nieuw object met rustmassa M.
Veronderstel nu twee verschillende scenario's.

1- In het inertiaal stelsel van een waarnemer beweegt het ene object met een snelheid β op het andere object, dat in ruste is, af.

2- In het inertiaal stelsel van de waarnemer bewegen beide objecten met ieder een snelheid van $\frac{1}{2}\beta$ naar elkaar toe.

Gebruik nu de vier-vector methode voor de volgende opdrachten.

a- Bepaal voor beide scenario's algebraïsch de snelheid β' en de rustmassa M van het nieuw gevormde deeltje en druk deze uit in m en γ [er geldt : $\gamma = 1/\sqrt{(1-\beta^2)}$, en $\gamma\beta=\sqrt{(\gamma^2-1)}$].

b- Neem $\beta = 0.8$ en bepaal grafisch met behulp van p-E diagrammen in beide scenario's de rustmassa *M* uitgedrukt in *m* (tip: gebruik in het diagram *m*=10 kg en neem 1 hokje=1 kg.

c- Geef een verklaring waarom de in beide scenario's gevonden rustmassa's van het samengestelde deeltje van elkaar verschillend zijn.